Esercitazioni di matematica–V Liceo Scientifico

Centro Scolastico Kennedy

Giuseppe Forte[*][†]

Versione v.0: 8 dicembre 2018

[*] Centro Scolastico Kennedy, Via Circumvallazione 13 (Palazzo Cammino), 83100 AV.
[†] **Contatti** email: gforte@outlook.it, Skype: giuseppe.forte22

Indice

Prefazione

In queste note ho deciso di raccogliere gli esercizi che durante l'anno affronterò insieme ad i miei alunni del Liceo Scientifico Paritario Kennedy. Spero che questa raccolta possa essere di aiuto a tutti quelli che intendono avvicinarsi allo studio della matematica. Gli esercizi più semplici sono contrassegnati con un singolo asterisco ($*$), quelli di media difficoltà con due asterischi ($**$) e per finire quelli che richiedo competenze ben al di sopra della media con tre asterischi ($***$).

Qualunque errore di battitura e/o errore nelle soluzioni può essere comunicato direttamente tramite mail. Provvederò, quanto più tempestivamente possibile, a sistemare la parte errata.

Chiunque fosse interessato ad espandere ed ampliare questa raccolta, collaborando attivamente alla stesura di essa, può contattarmi in privato e chiedere il sorgente LaTeX su cui lavorare.

Avellino, Ottobre 2018
Giuseppe Forte

"*Do! Or do not! There is no try!*"
Manster Yoda, Star Wars–Episode IV: The Empire Strikes Back

Parte I
Richiami sulle funzioni reali di variabile reale.

1 Funzioni reali di variabile reale

1.1 Esercizi generali sulle funzioni.

Esercizio 1.1 (*). *Si dia la definizione di funzione in due righe e si risponda alle domande seguenti.*

(a) *Consideriamo l'insieme $X = \{$Tutte le mamme del mondo$\}$ e l'insieme $Y = \{$Tutti i figli del mondo$\}$. Consideriamo poi la relazione che ad ogni mamma di X associa i rispettivi figli in Y. Tale relazione è una funzione? Giustificare la risposta.*

(b) *Si supponga assegnata la funzione $y = f(x)$. Come possiamo rappresentare graficamente la funzione assegnata sul piano cartesiano?*

(c) *Il grafico di Fig. 1.1 può essere il grafico di una funzione? Giustificare la risposta.*

(d) *Qual è il numero massimo di intersezioni che una funzione può avere con l'asse delle y?*

(d.1) *Dipende dalla funzione. In linea di principio anche infinite intersezioni.*

(d.2) *1*

(d.3) *27*

(d.4) *0*

Soluzione

Una funzione è una qualunque regola che, ad *ogni* elemento x di un insieme assegnato X (*dominio della funzione*), associa *in maniera univoca* uno ed un solo elemento y di un insieme Y (codominio della funzione). Si dice allora che $y \in Y$ si ottiene da $x \in X$ tramite la funzione f e si scrive $y = f(x)$. *NOTA BENISSIMO: ad ogni x corrisponde UNO ED UN solo y. Il viceversa (tipicamente) NON è vero!!!!*

(a) No: non è una funzione. Infatti ad una mamma ($x \in X$) possono in generale essere associati *differenti* figli (ovvero due *differenti* $y \in Y$). Una funzione, invece, ad ogni x associa *in maniera univoca* uno ed un solo y (NON DUE O PIÙ DI DUE).

(b) Il modo più semplice è costruire una tabella e scrivere in una colonna i valori di x e nell'altra i rispettivi valori di y. Ad esempio, ad una successione crescente di n punti in X, i. e. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ con $x_1 > x_2 > x_3 \cdots$ possiamo associare *in maniera univoca* i valori $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$. A questo punto disegniamo su un piano cartesiano le coppie di punti $\mathscr{G}_1(x_1, f(x_1)), \mathscr{G}_2(x_2, f(x_2)), \cdots, \mathscr{G}_n(x_n, f(x_n))$. L'insieme di punti $\mathscr{G}_1, \cdots, \mathscr{G}_n$, se sufficientemente "denso", rappresenta il *grafico* della funzione $\cdots$ in altre parole: unite i punti e la linea che esce fuori vi restituisce il grafico che cercate.

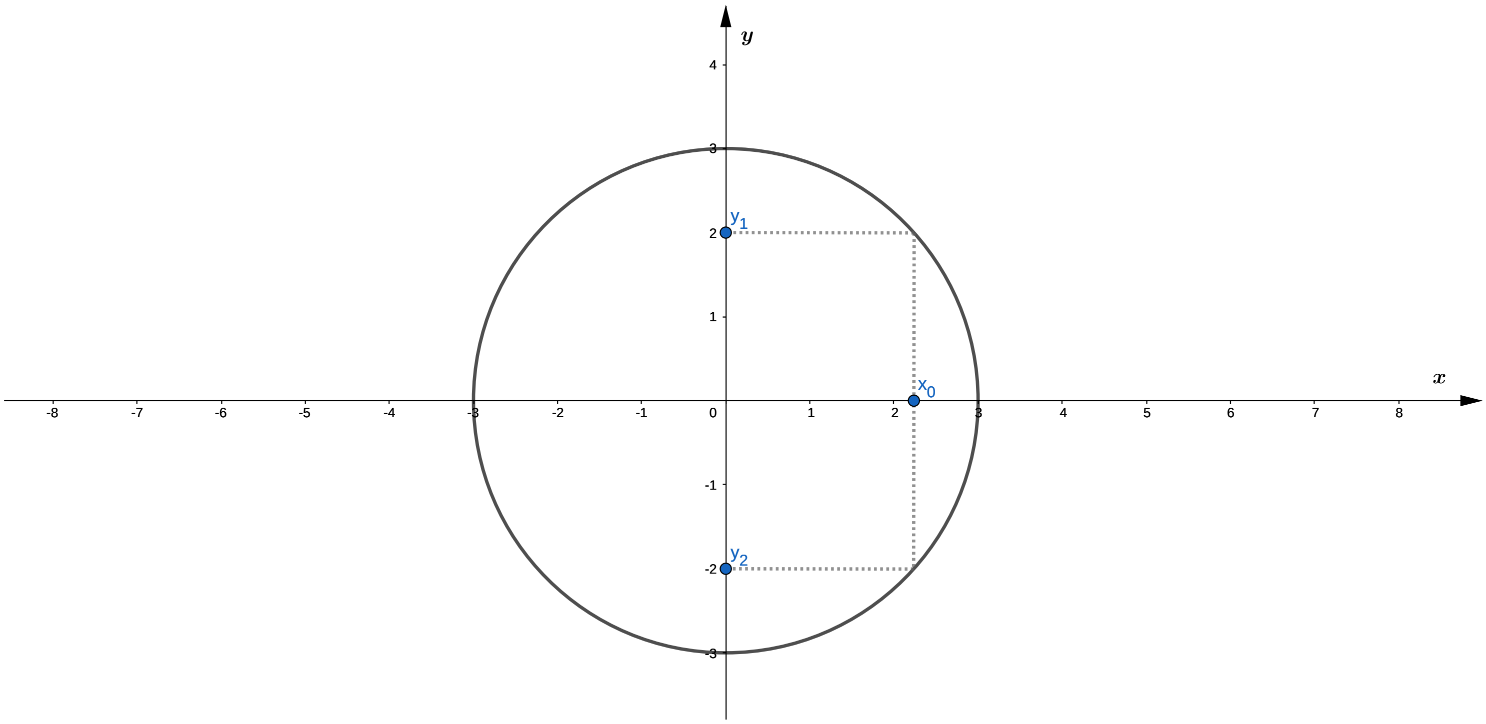


Figura 1.1 – Esercizio 1.1

(c) Il grafico rappresenta una circonferenza di raggio $R = 3$. Esso *non rappresenta il grafico di una funzione*. Ad esempio, se prendiamo il punto x_0, ad esso vediamo che sono associati *due* valori y_1 ed y_2. Per l'ennesima volta, una funzione, ad ogni x associa in *maniera univoca* uno ed un solo valore di y, qui ne abbiamo due e quindi il grafico non rappresenta una funzione.

(d) La risposta esatta è (d.2). Perché?

Esercizio 1.2. *Si considerino le funzioni*

$$y = f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 1 \tag{1.1}$$

$$y = f_2(x) = (x-1)^2 + 1 \tag{1.2}$$

(a) Si dimostri, senza fare nessun conto, che $f_2(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

(b) Costruendo opportunamente le tabelle numeriche associate alle funzioni assegnate, si disegnino sullo stesso grafico le due funzioni (si utilizzi il grafico vuoto in Fig. 1.2). Per la funzione f_2, si aggiunga al grafico il punto $P_V(1, f_2(1))$. Perché questo punto è così particolare per la funzione f_2?

(c) Si considerino le funzioni

$$\mathscr{R}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \qquad \mathscr{Q}(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

(c.1) Si determini i valori di $x \in \mathbb{R}$ (se esistono) tali che $\mathscr{R}(x) \geq 0$.

(c.2) Si determini i valori di $x \in \mathbb{R}$ (se esistono) tali che $\mathscr{Q}(x) \geq 0$.

(c.3) Si determini i valori di $x \in \mathbb{R}$ (se esistono) tali che $\mathscr{R}(x)/\mathscr{Q}(x) \geq 0$.

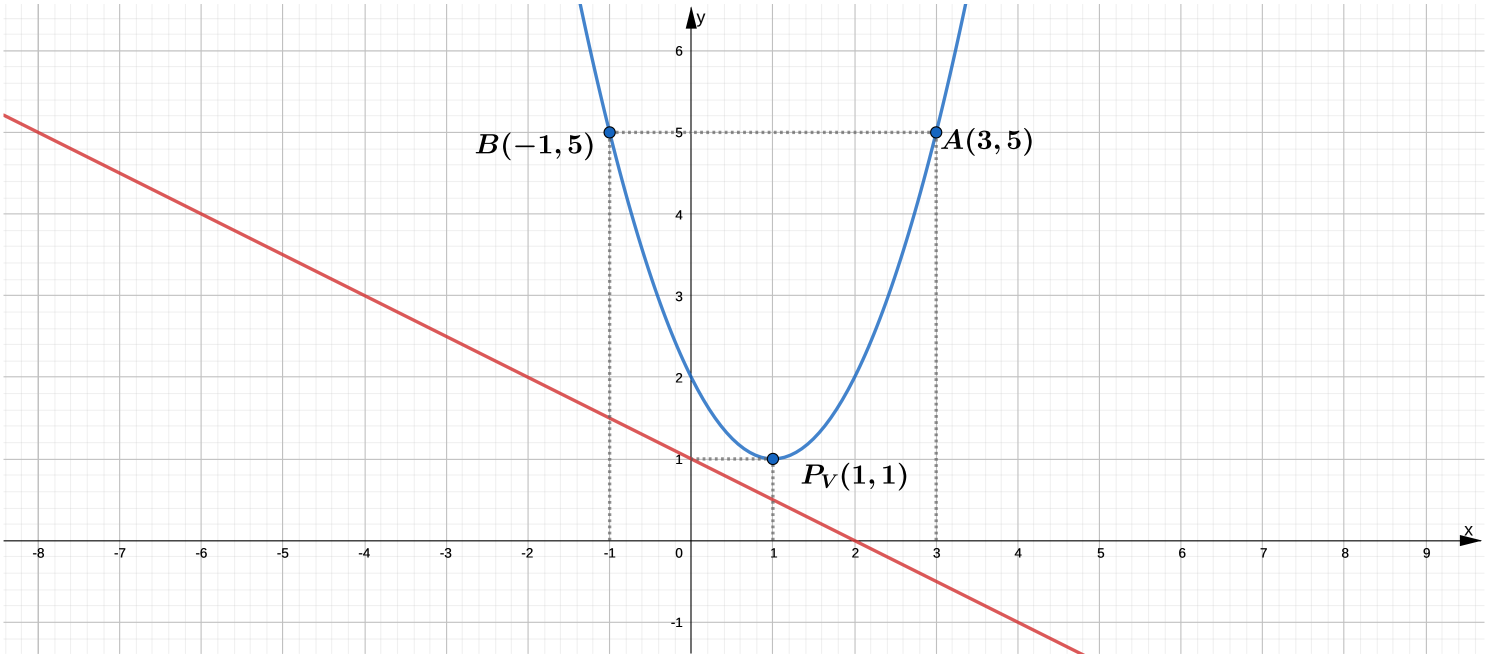


Figura 1.2 – Esercizio 1.2 (b)

Soluzione

(a) Basta ricordare che assegnato un numero $z \in \mathbb{R}$, risulta *sempre* $z^2 \geq 0$, ovvero, detto in altri termini, il quadrato di un numero (*positivo o negativo che sia*) è sempre un numero positivo o tutt'al più nullo. Nel nostro caso abbiamo $z = (x-1)^2$, che sarà anch'esso sempre positivo. Al massimo, quando $x = 1$, risulta $(x-1)^2 = 0$. Segue immediatamente che se sommiamo 1 ad $(x-1)^2$, il risultato sarà comunque un numero positivo (z è positivo, sommato ad 1, che è un numero positivo, dà come risultato un numero positivo). Anzi il risultato sarà un numero maggiore o tutt'al più uguale ad 1!

(b) Si vedano gli appunti di teoria e si facciano i grafici in maniera analoga a quanto presentato negli appunti (P_{V} è il vertice della parabola: è un punto di massimo o minimo? Vedere gli appunti per la risposta).

(c) Qui qualche conticino va fatto. Dire che $\mathscr{R}(x) \geq 0$, equivale a dire che

$$\frac{-\dfrac{1}{2}x + 1}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$$

Dunque: dobbiamo trovare quei valori di x per cui *numeratore e denominatore sono dello stesso segno (entrambi positivi o entrambi negativi)*. In più dobbiamo poi imporre che il numeratore può anche annullarsi, in quel caso si avrebbe come risultato 0. Per finire, dobbiamo assicurarci che i risultati trovati non sono anche quei valori di x che annullano il denominatore, perché in quei punti $\mathscr{R}(x)$ non è definita. Riassumendo il tutto in formule abbiamo

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + 1 & \geq 0 \\ \\ (x-1)^2 + 1 & > 0 \end{cases}$$

La prima equazione del sistema ha soluzione

$$x \leq 2$$

mentre la seconda (vedi punto (a)) ha soluzione

$$x \in \mathbb{R}$$

Le due soluzioni possono essere rappresentate come in Fig. 1.3. I pallini colorati in blu nella figura indicano che il punto 2 fa parte della soluzione della prima equazione (altrimenti avremmo messo un pallino vuoto, corrispondente alla condizione $x < 2$). La soluzione che ci interessa sarà quella in cui

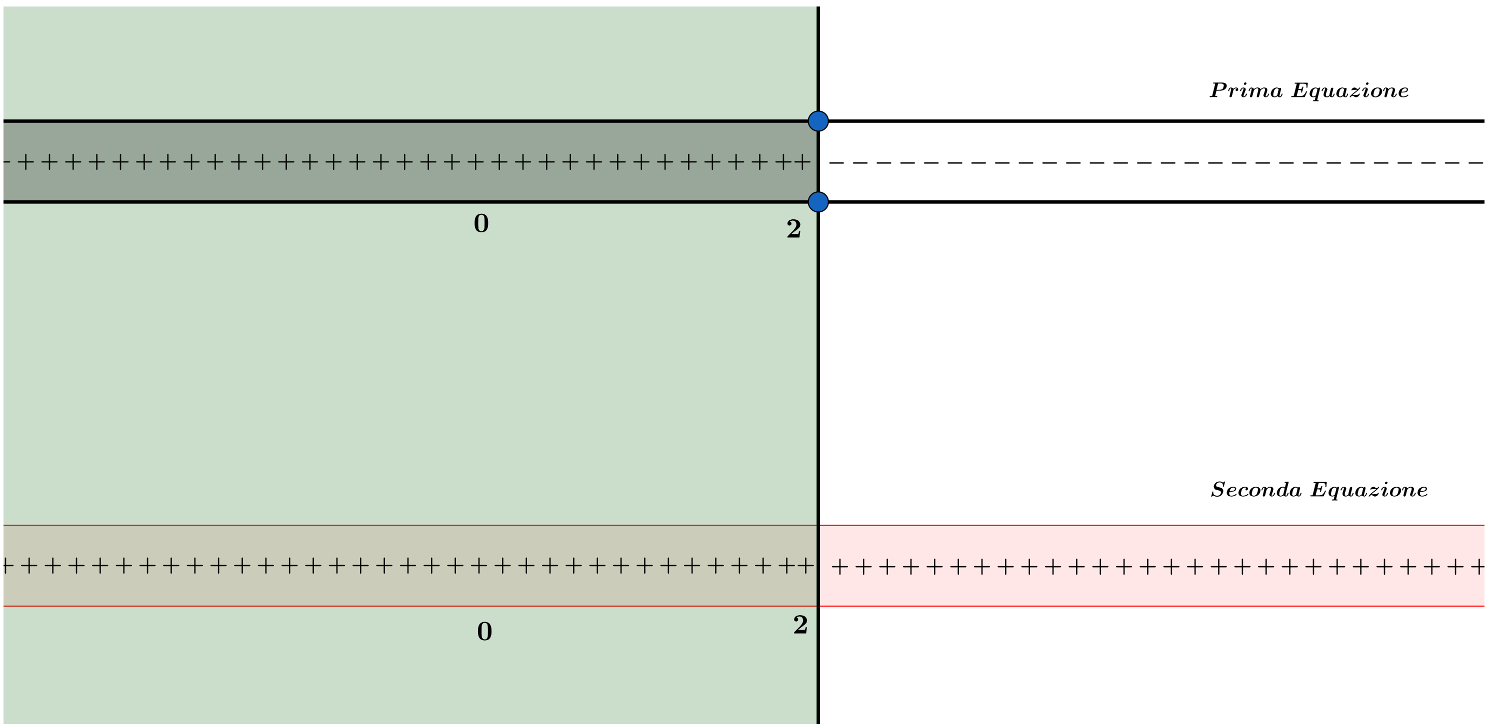


Figura 1.3 – Esercizio 1.2 (b)

il prodotto dei segni fra numeratore e denominatore dà come risultato un segno positivo e quindi la soluzione finale è $x \leq 2$.

(c.2) La soluzione è praticamente la stessa del punto precedente con una sola differenza. Si spieghi, senza fare nessun conto, qual è la differenza.

(c.3) La soluzione è $x \in \mathbb{R}$. Anche questa soluzione si ricava senza fare conti. Come si fa?

Esercizio 1.3 (*). *Si consideri la retta*

$$y = f(x) = mx + p$$

dove m e p sono parametri assegnati.

(a) Si dimostri che la retta $y = f_1(x) = mx + \tilde{p}$ (con $\tilde{p} \neq p$) è parallela all retta assegnata ($f(x)$). Inoltre, si provi che se prendiamo $\tilde{p} = y_a - mx_a$, allora $f_1(x)$ è parallela ad $f(x)$ e passa per il punto di coordinate $A(x_a, y_a)$.

(b) *Si dimostri che la retta* $y = f_2(x) = -\frac{1}{m}x + \tilde{p}$ *è perpendicolare alla retta assegnata* ($f(x)$). *Si dimostri inoltre che se prendiamo* $\tilde{p} = y_a + \frac{1}{m}x_a$, *allora* $f_2(x)$ *è perpendicolare alla retta assegnata e passa per il punto di coordinate* $A(x_a, y_a)$.

Soluzione (Cenno)

(a) Due rette parallele si trovano sempre alla stessa distanza l'una dall'altra. Chiamiamo α la retta $f(x)$ e β la retta $f_1(x)$. Sia $A(x_a, y_a)$ un punto che appartiene ad α (uno qualunque). La distanza di A dalla retta β si può calcolare con la formula

$$d(A,\beta) = \frac{|y_a - mx_a - \tilde{p}|}{\sqrt{1+m^2}} \tag{1.3}$$

A questo punto basta dimostrare che se $B(x_b, y_b)$ è un punto che appartiene a β, allora la distanza di B da α, ovvero

$$d(B,\alpha) = \frac{|y_b - mx_b - p|}{\sqrt{1+m^2}}$$

soddisfa la relazione

$$d(B,\alpha) = d(A,\beta), \qquad \forall A \in \alpha, B \in \beta$$

Dunque $\cdots$
La seconda parte dell'esercizio è banale.

(b) Sia $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ il punto di intersezione fra α e β. Si prenda su α un punto $A(x_a, y_a)$ e su β un punto $B(x_b, y_b)$. A questo punto si consideri il triangolo di vertici $A\mathcal{O}B$. Si indichi inoltre la distanza fra i punti $A\mathcal{O}$ con $d(A,\mathcal{O})$ (che ovviamente è uguale a $d(\mathcal{O}, A)$). In maniera analoga si indica la distanza fra le altre coppie di punti. Se le due rette sono perpendicolari allora il triangolo ottenuto è *rettangolo* in $\mathcal{O}$. Ovvero, deve valere il teorema di Pitagora e quindi si deve provare che

$$d^2(A,B) = d^2(\mathcal{O},A) + d^2(\mathcal{O},B)$$

Dunque $\cdots$ (In effetti cè una forzatura nel ragionamento, sapreste dire quale?)
La seconda parte dell'esercizio è banale.

1.2 Esercizi su funzione esponenziale e logaritmica.

Esercizio 1.4 (**). *Si determini per quali valori di* $x \in \mathbb{R}$ *(se esistono) risultano soddisfatte le seguenti espressioni*

(a) $\log_{10}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \geq 0$

(b) $\log_a f(x) = \log_b f(x)$ $(a \neq b)$.

(c) $a^x = 7$

(d) $e^{2x^2-1} = \beta$ *(si assuma* $\beta > 1$*)*

(e) *Si consideri nuovamente l'esercizio del punto precedente. Cosa succede se* $\beta < 0$? *Si risponda senza fare conti.*

Soluzione

(a) Ricordiamo che $log_a(x) > 0$ per $x > 1$ quando $a > 1$ (come nel nostro caso, in cui $a = 10$). Dobbiamo dunque imporre

$$\frac{1}{x^2+1} > 1 \Longleftrightarrow -\frac{x^2}{x^2+1} > 0$$

Qui si procede come nell'esercizio 1.2 (c.1). Tuttavia, non c'è bisogno di fare conti. Si trova immediatamente che la soluzione della disequazione assegnata è l'insieme vuoto $\emptyset$, ovvero *non esistono* $x \in \mathbb{R}$ che soddisfano la disuguaglianza assegnata. Si facciano tutti i conti per stabilire se il risultato fornito è sbagliato.

(c) La formula del cambiamento di base dice che (v. appunti)

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_a b}$$

Utilizzando questa formula abbiamo

$$\log_a f(x) = \frac{\log_b f(x)}{\log_a b}$$

e quindi dovremmo trovare gli x per cui risulta verificata l'uguaglianza

$$\frac{\log_b f(x)}{\log_a b} = \log_b f(x) \Longleftrightarrow 1 = \log_a b$$

L'ultima uguaglianza è vere se e solo se $a = b$. Tuttavia, la traccia dice esplicitamente di considerare $a \neq b$ e dunque la soluzione non esiste: è l'insieme vuoto $\emptyset$. Cosa succede quando $a = b$?

(d) Si applica direttamente la definizione di logaritmo riportata negli appunti. La soluzione è

$$x = \log_a 7$$

Infatti il logaritmo è quel numero che messo ad esponente della base mi restituisce l'argomento. Dunque, dalla soluzione trovata sopra, prendo x, lo metto ad esponente di a, ed ottengo $a^x = 7$.

(d) Indichiamo il logaritmo in base "e" alla seguente maniera

$$\log_e x = \ln x$$

esso si chiama anche *logaritmo naturale*. Per definizione di logaritmo possiamo scrivere

$$\beta = e^{\ln \beta}$$

ovvero l'equazione assegnata diventa

$$e^{2x^2-1} = e^{\ln \beta}$$

A questo punto eguagliamo gli esponenti ed otteniamo

$$\ln \beta = 2x^2 - 1 \qquad \rightarrow \qquad x^2 - \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{\beta}\right)\right) = 0$$

$$\rightarrow x_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} + \ln\left(\sqrt{\beta}\right)} \tag{1.4}$$

(Il risultato è corretto? Oppure è stato fatto un errore di conto?)

(e) La soluzione non esiste. Infatti dovremmo risolvere $e^{2x^2-1} = \textit{numero negativo}$, tuttavia, l'esponenziale *non è mai una funzione negativa e dunque, indipendentemente dal valore di x, se $\beta < 0$ non esiste soluzione all'equazione*. Cosa succede se $0 < \beta < 1$? Chiamiamo con $Solu(\beta)$ la relazione che ad ogni $\beta > 1$ associa la soluzione data in Eq. (1.4). La relazione così definita è una funzione?.

Chiamiamo adesso $f_+(\beta)$ la relazione che ad ogni $\beta \in (0,1)$ associa la soluzione positiva in Eq. (1.4). La relazione così definita è una funzione? Qual è il suo campo di esistenza? Cosa possiamo dire del limite

$$\lim_{\beta \to 0^+} f_+(\beta)$$

Cosa possiamo invece dire della soluzione dell'equazione

$$e^{2x^2-1} = \beta$$

quando $0 < \beta < 1$?

1.3 Esercizi su funzioni trigonometriche.

Esercizio 1.5 (**). *Si risolvano le seguenti equazioni e disequazioni trascendenti*[1]

(a) $e^{-x}\left(\frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$

(b) $\cos(2\pi x) = \frac{\sqrt{12}}{4}$

(c) $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

(d) $\cos^2\left(x^2 + 2x - 1\right) = 1$

Soluzione

(a) L'esercizio assegnato richiede di determinare i valori di x per i quali la disuguaglianza assegnata è sempre soddisfatta. La disuguaglianza si presenta nella forma

$$f(x)g(x) \leq 0$$

con $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = \left(\frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\right)$. Affinché il prodotto di queste due funzioni sia negativo esse devono risultare di segno opposto, tuttavia, la funzione $f(x) = e^{-x}$ è *sempre strettamente positiva*, i. e. non si annulla mai e non assume mai valori negativi, dunque per risolvere l'esercizio sarà sufficiente determinare i valori di x per i quali risulta

$$\left(\frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$$

A tal proposito, osserviamo che (utilizzando l'identità trigonometrica fondamentale)

$$g(x) = \left(\frac{3}{4}\cos^2 x - \frac{1}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\right) = \cos^2 x$$

[1]Si assumano tutti gli angoli espressi in radianti.

Essendo $g(x)$ esprimibile come il quadrato di una quanità reale, essa sarà sempre un numero positivo o tuttal'più nullo. I valori di x che stiamo cercando sono dunque tutti e soli i valori reali che soddisfano la relazione

$$\cos x = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

(b) Poniamo $\alpha = 2\pi x$. L'esercizio proposto chiede di determinare i valori di α per i quali risulta

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'uguaglianza qui sopra è senza dubbio verificata quando

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Dunque, ricordando che $\alpha = 2\pi x$, le soluzioni appena trovate per α diventano

$$x = \frac{1}{12} + k, \qquad x = \frac{5}{12} + k, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(d) Il coseno è uguale a ± 1 quando il suo argomento è un multiplo intero di π, ovvero deve essere

$$x^2 + 2x - 1 = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

da cui segue

$$x_\pm = -1 \pm \sqrt{2 + k\pi}$$

Per accettare la soluzione qui sopra deve essere

$$2 + k\pi \geq 0 \qquad \rightarrow \qquad k \geq -\frac{2}{\pi}$$

il che restringe k ad i valori $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Esercizio 1.6 (*). *Grafici di funzioni trigonometriche:*

(a) *Si disegnino i grafici qualitativi delle funzioni* $f(x) = \cos(2\pi x)$ *ed* $f(x) = \sin(\pi/x)$

(b) *Si disegni il grafico di* $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

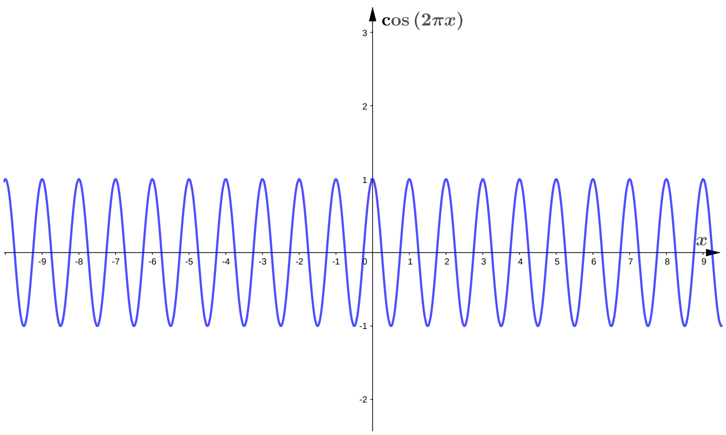
1.4 Esercizi su campo di esistenza, discontinuità ed asintoti.

Esercizio 1.7. *Si determini il campo di esistenza delle seguenti funzioni*

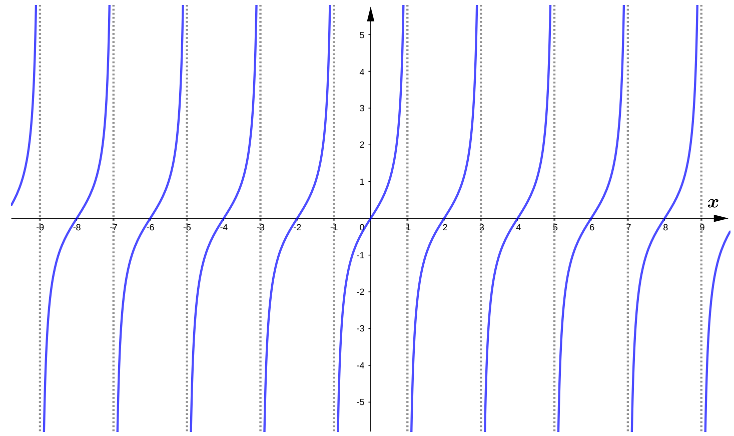
(a) $f(x) = \log_a\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$

(b) $f(x) = a^{\log_a g(x)}$. *Si determini il campo di esistenza nel caso di una funzione generale* $g(x)$ *e si specializzi il risultato per la funzione* $g(x) = |x| - x^2$.

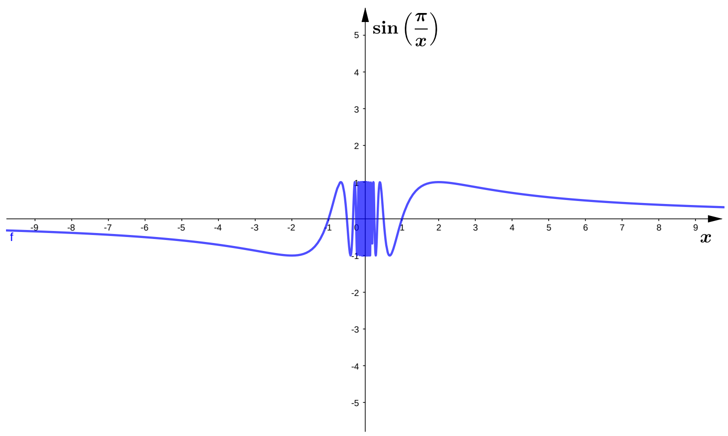
(c) $f(x) = \frac{3x^2-1}{(x^4-1)(x^2+x-6)}$



(a)Grafico di $\cos(2\pi x)$



(b)Grafico di $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$



(c)Grafico di $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Figura 1.4 – Esercizio 1.6

Soluzione

(a) Come riportato negli appunti, $\log_a x$ è una funzione definita per ogni $x > 0$. Nel nostro caso dobbiamo dunque avere

$$\frac{1}{x^2+1} > 0$$

che ovviamente, senza fare conti, è sempre verificata. Dunque il campo di esistenza è dato da $X = \mathbb{R}$. Tuttavia, meglio fare i conti, avessi visto mai $\cdots$ che il prof. si sbaglia.

(b) Come detto sopra, il logaritmo è definito per valori strettamente positivi del suo argomento. Dunque dobbiamo imporre

$$g(x) > 0$$

Nel caso in cui $g(x) = |x| - x^2$ dobbiamo imporre

$$|x| - x^2 > 0$$

Ricordiamo che la funzione valore assoluto è definita alla seguente maniera:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \ge 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per calcolare il campo di esistenza dobbiamo dunque risolvere il sistema

$$|x| - x^2 > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x > 0, & \text{se } x \ge 0 \\ -x^2 - x > 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi $\cdots$ facendo i conti (fateli!) il campo di esistenza è dato da

$$X = (\text{-BabboNatale}, 0) \cup (0, \text{+BabboNatale})$$

Quanto vale BabboNatale?

(c) Il campo di esistenza si ottiene imponendo il denominatore diverso da zero, ovvero

$$(x^4 - 1) \neq 0 \qquad \text{OPPURE} \qquad (x^2 + x - 6) \neq 0$$

La prima equazione fornisce le soluzioni $x_{\pm}^{(1)} = \pm 1$. La seconda invece $x_{\pm}^{(2)} = 2, -3$ e dunque il campo di esistenza è $X = \mathbb{R} - \{\pm 1, 2, -3\}$

1.5 Equazioni e disequazioni.

Ricordo brevemente alcune definizioni legate alla funzione potenza di base $a > 0$ ed *esponente razionale* (v. anche gli appunti)[2]. La scrittura

$$y = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

vuol dire che y è quel numero tale che

$$y^n = a^m \tag{1.5}$$

Ricordiamo anche le proprietà principali della funzione potenza

(I) $a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha$ con $a, b > 0$ ed α razionale.

(II) $a^{\pm\alpha} a^{\pm\beta} = a^{\pm\alpha\pm\beta}$ con $a, b > 0$ ed α, β entrambi razionali.

(III) $\left(a^\alpha\right)^{\pm\beta} = a^{\pm\alpha\beta}$ con $a, b > 0$ ed α, β entrambi razionali.

(IV) Possiamo estendere la potenza anche al caso con base negativa, ad esempio $-a$ ($a > 0$) **quando l'esponente** $\alpha = m/n$ **è tale che** n **è dispari**. In questo caso

$$y = (-a)^{m/n} = \sqrt[n]{(-a)^m} \qquad \rightarrow \qquad y^n = (-a)^m$$

Facciamo alcuni esempi

Esempio 1.1. *(a) $y = \sqrt{4} = 2$. Infatti, per definizione, y è quel numero tale che $y^2 = 4$ (v. Eq. (1.5)). Se prendiamo $y = 2$, otteniamo, come deve essere, $y^2 = 4$.*

[2] Esponente razionale vuol dire che scriviamo qualcosa del tipo $a^{m/n}$ con m ed n che possono essere del tipo $m, n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots$

(b) $y = \sqrt{27}$. *Anzitutto, utilizzando la proprietà* ***(II)*** *scritta sopra, scriviamo* $27 = 3 \times 3^2$. *Possiamo poi utilizzare le proprietà* ***(I)*** *e* ***(III)*** *scritte sopra e scrivere* $y = \left(3 \times 3^2\right)^{1/2} = 3^{1/2} \times 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3\sqrt{3}$. *Dunque, in definitiva* $y = 3\sqrt{3}$. *Infatti risulta, come deve essere* $y^2 = (3\sqrt{3})^2 = (3 \times 3^{1/2})^2 = 27$.

(c) $y = \sqrt[3]{-27} = -3$. *Infatti, per definizione,* y *è quel numero tale che* $y^3 = -27$. *Se prendiamo* $y = -3$, *otteniamo, come deve essere,* $y^3 = -27$.

Esercizio 1.8 (*). *Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:*

(a) $x(x+3) - a(3-a) = 2(ax-1)$ *(al variare del parametro* $a \in \mathbb{R}$*)*

(b) $(x-2)^6 - 26(x-2)^3 = 27$

(c) $x^4 + x^2 - 12 < 0$

Soluzione

(a) L'equazione assegnata è equivalete alla seguente espressione

$$x^2 + 3x - 3a + a^2 = 2ax - 2 \qquad \to \qquad x^2 + \alpha x + \gamma = 0$$

dove abbiamo posto

$$\alpha = 3 - 2a, \qquad \gamma = a^2 + 2 - 3a$$

A questo punto si tratta di risolvere un'equazione di II–grado (si vedano, ad esempio, gli appunti). La soluzione finale è data da

$$x_\pm = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2} \cdots$$
$$\cdots x_+ = a - 1, \qquad x_- = a - 2$$

(b) Introduciamo la variabile $z = (x-2)^3$, allora l'equazione proposta diventa equivalente a

$$z^2 - 26z - 27 = 0 \qquad \to \qquad z_\pm = 13 \pm \sqrt{169 + 27} = 13 \pm 14$$

da cui ricaviamo

$$z_+ = 27, \qquad z_- = -1$$

Per completare l'esercizio dobbiamo ricordare che $z = (x-2)^3$. Possiamo dunque esprimere z_+ in funzione di una certa variabile x_+ (che ancora non conosciamo) tale che

$$z_+ = (x_+ - 2)^3 \qquad \to \qquad 27 = (x_+ - 2)^3 \qquad \to \qquad \sqrt[3]{27} = x_+ - 2$$

da cui in definitiva si trova $x_+ = 5$. In maniera analoga abbiamo

$$z_- = (x_- - 2)^3 \qquad \to \qquad -1 = (x_- - 2)^3 \qquad \to \qquad \sqrt[3]{-1} = x_- - 2$$

da cui $x_- = 1$

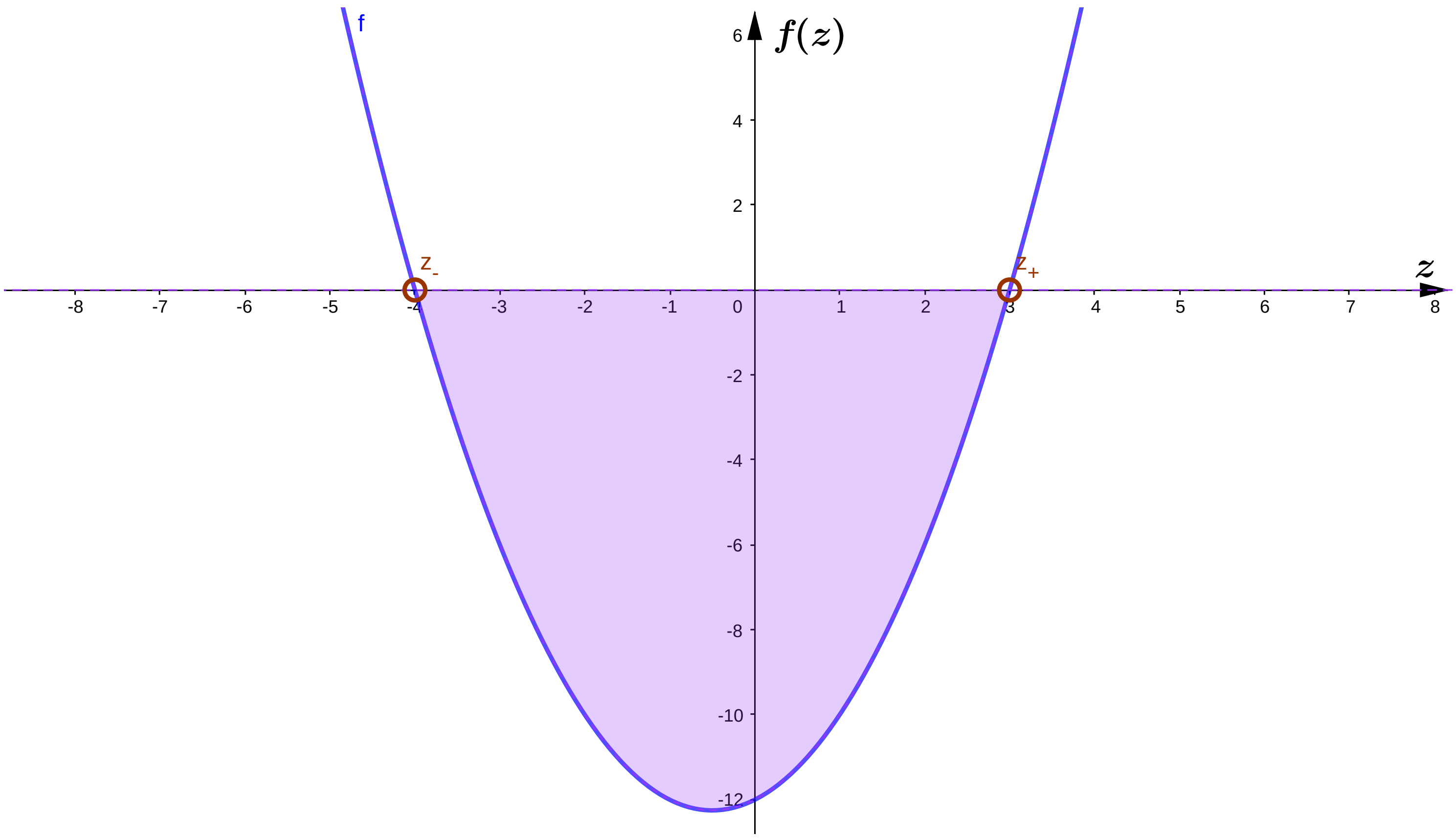


Figura 1.5 – Ricorda: i pallini aperti vengono messi per sottolineare che $z = 3$ e $z = -4$ *non devono essere parte dell'insieme soluzione*, qualunque esso sia.

(c) Introduciamo la variabile $z = x^2$, allora la disequazione assegnata diventa equivalente a

$$z^2 + z - 12 < 0$$

Risolviamo prima l'equazione associata $f(z) = z^2 + z - 12 = 0$. Le soluzioni sono

$$z_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \qquad \rightarrow \qquad z_+ = 3,\ z_- = -4$$

Dobbiamo adesso determinare i valori di z per cui risulta che $f(z) < 0$. Facciamo un disegno alla buona della funzione $f(z)$ in funzione di z. Dal grafico in Fig. 1.5 vediamo subito che $f(z) < 0$ per $z_- < z < z_+$, ovvero $-4 < z < 3$. Ricordiamo poi che abbiamo posto $z = x^2$, ovvero dobbiamo avere $-4 < x^2 < 3$ e quindi la soluzione deve soddisfare entrambe le condizioni

$$\begin{cases} x^2 & > -4 \\ x^2 & < 3 \end{cases}$$

Chiaramente x^2 è sempre un numero positivo (o tutt'al più nullo) e dunque, *a maggior ragione*, risulta sempre $x^2 > -4$. Questo implica che la prima disuguaglianza è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$. La seconda disequazione di risolve in maniera equivalente alla maniera in cui abbiamo risolto $f(z) < 0$. In questo modo troviamo $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. La soluzione finale dell'esercizio è dunque

$$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, \qquad |x| < \sqrt{3}$$

Esercizio 1.9 (*). *Risolvere il seguente sistema di disequazioni*

$$\begin{cases} x^2 - 8x - 20 & < 0 \\ 5x - 1 & > 3x - 8 \end{cases}$$

Esercizio 1.10 (**). *Sia*

$$f(x) = \frac{x^2 - \pi^2}{x^4 + x^2 - 12}$$

Determinare per quali valori di x risulta $f(x) \leq 0$. Determinare inoltre il campo di esistenza di $f(x)$

Soluzione (suggerimento).

Si risolva il sistema

$$\begin{cases} x^2 - \pi^2 & \leq 0 \\ x^4 + x^2 - 12 & < 0 \end{cases}$$

La prima disequazione ha una soluzione praticamente immediata. La seconda è stata già risolta nell'esercizio 1.8 (c). Si procede poi con lo studio del segno. Per il campo di esistenza deve risultare il denominatore diverso da zero e quindi $\cdots$

Parte II

Derivate ed Integrali.

2 Derivate e applicazioni

2.1 Dal grafico alle proprietà della funzione & back.

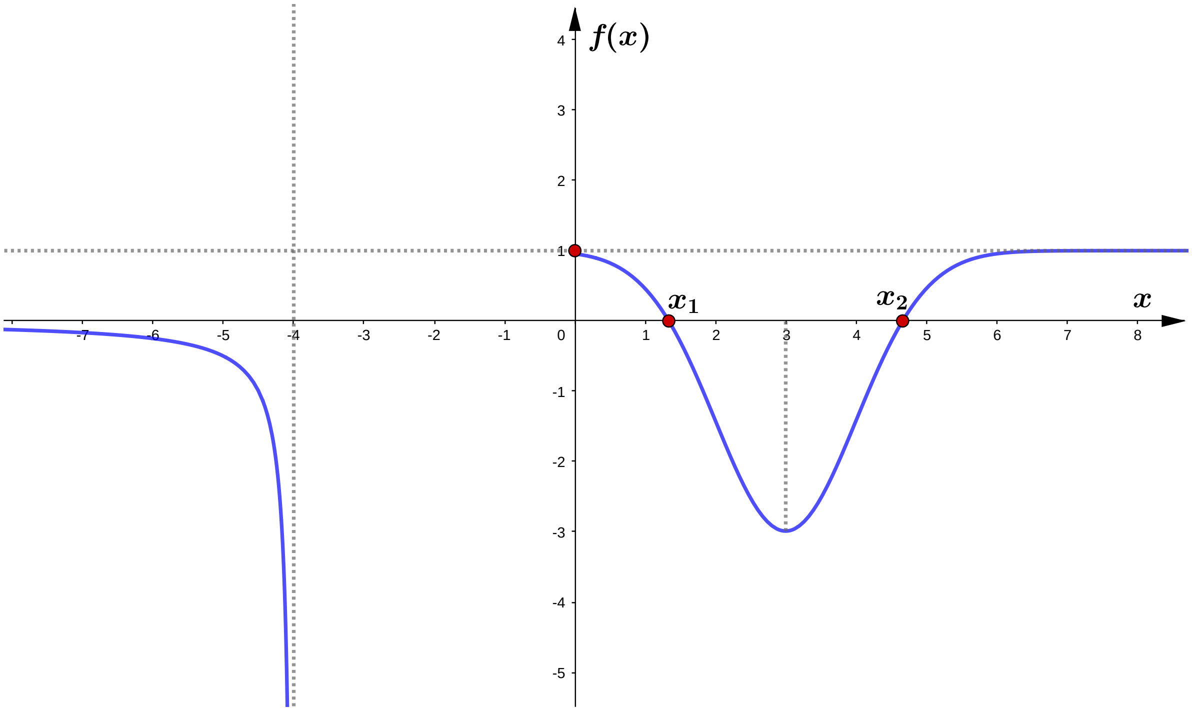


Figura 2.1

Esercizio 2.1 (**). *Il grafico della funzione $f(x)$ è dato in Fig. 2.1 . Si determini*

(a) $\lim_{x\to -4} f(x)$;

(b) $\lim_{x\to -4^-} f(x)$;

(c) *Il campo di esistenza della funzione;*

(d) *i valori di x tali che $f(x) \geq 0$;*

(e) $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$;

(f) $\lim_{x\to 0} f(x)$;

(g) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$;

(h) *i valori di x tali che $f(x) < 0$;*

(i) il valore della derivata di $f(x)$ nel punto $x = 3$;

(l) il valore della derivata di $f(x)$, per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 2.2 (**). *Con riferimento alla funzione in Fig. 2.1, si determini il valore $f(0)$. La funzione è continua in $x = 0$? Argomentare la risposta*

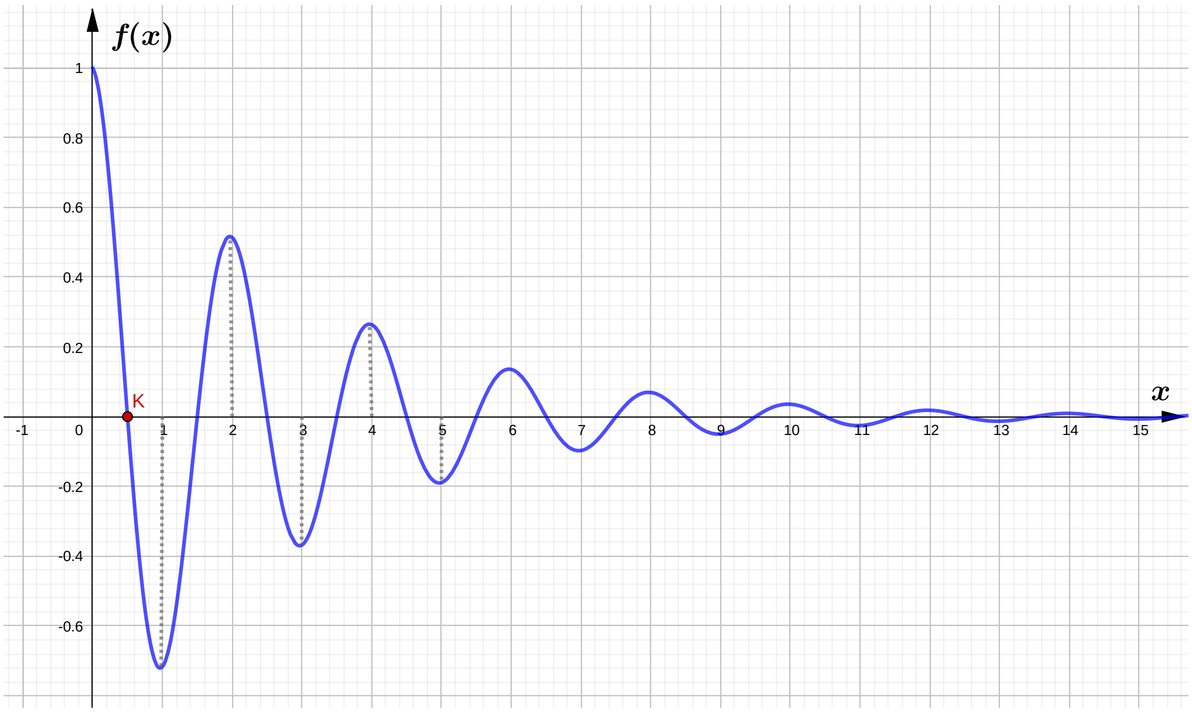


Figura 2.2 – $K = 1/2$.

Esercizio 2.3 (**). *Con riferimento alla funzione in Fig. 2.2, determinare:*

(a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$;

(b) il campo di esistenza della funzione;

(c) il valore della derivata di x nei punti $x = n$ con $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$;

(d) $\lim_{x \to 0} f(x)$;

(e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$;

Esercizio 2.4 (*). *Sia la funzione $f(x)$ come in Fig. 2.1 e $g(x)$ come in Fig. 2.2. Si determini i valori di $x \in [0, 1]$ tali che $f(x)/g(x) > 0$*

Esercizio 2.5 (***)**.** *Sia $f(x)$ la funzione definita da*

$$f(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \delta\right)$$

Si determini, nel generico punto x, la derivata prima di $f(x)$ (v. anche Esercizio 2.6 (i)). Si assuma di conoscere A, λ e δ (sono numeri che qualcuno ha fornito dall'esterno, fissati, ovvero sono parametri*; v. anche il Cap. 1 dei relativi appunti di matematica).*

(a) *Si stabilisca se $f(x)$ è periodica. In caso di risposta affermativa, si dica quanto vale il periodo della funzione $f(x)$ in funzione dei parametri A, λ e δ.*

(b) *Sia $z = x + \frac{\lambda\delta}{2\pi}$. Si disegni il grafico delle funzioni $h_1(z)$ ed $h_2(z)$ così definite*

$$\begin{aligned} h_1(z) &= \frac{f(z)}{A}, \qquad (A \neq 0) \\ h_2(z) &= h_1\left(\frac{\lambda z}{2\pi}\right) \end{aligned}$$

(c) *Nel caso in cui la funzione $f(x)$ dovesse essere periodica (v. punto (a)). Qual è la relazione tra il periodo di $f(x)$ ed il periodo della funzione*

$$F(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + 2^{3^{4^{5^{6^{7^{8^{9^{10^{\pi}}}}}}}}}\delta \ln(\pi)\right)$$

?

2.2 Tabella delle regole di derivazione e relazioni utili.

Nel seguito la derivata m di una funzione $f(x)$ in un generico punto x verrà indicata, indifferentemente, con uno dei seguenti simboli equivalenti :

$$m = \frac{df(x)}{dx}; \qquad m = f'(x), \qquad m = \mathscr{D}[f, x]$$

Ricordiamo alcune regole per il passaggio di base nelle funzioni esponenziali e logaritmiche (v. Cap. 1 degli appunti).

- Se vogliamo trasformare il logaritmo in base a in un logaritmo in base e (e viceversa), possiamo utilizzare equivalentemente una delle due relazioni seguenti:

$$\log_a(x) = \log_a(e)\ln(x) \tag{2.1}$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \tag{2.2}$$

Tabella 1 – Derivate delle funzioni elementari più note e regole di derivazione.

f(x)	**derivata prima**
$a,\ a \in \mathbb{R}$	0
x	1
$x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
a^x	$\ln(a)\, a^x = \frac{a^x}{\log_a(e)}$
$\log_a(x)$	$\frac{\log_a(e)}{x} = \frac{1}{x\ln(a)}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}\frac{df}{dx}$

f(x), g(x) funzioni assegnate	**Regola di derivazione**
$\frac{d[af(x)]}{dx},\ a \in \mathbb{R}$	$a\frac{df(x)}{dx}$
$\frac{d[f(x)+g(x)]}{dx}$	$\frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$
$\frac{d[f(x)g(x)]}{dx}$	$g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}$
$\frac{d[f(x)/g(x)]}{dx}$	$\frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{[g(x)]^2}$
$\frac{df(z(x))}{dx}$	$\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}$

- Eguagliando le due relazioni precedenti si ottiene direttamente la relazione

$$\log_a(e) = \frac{1}{\ln(a)} \tag{2.3}$$

- Se vogliamo trasformare l'esponenziale in base a in un esponenziale in base e (e viceversa), possiamo utilizzare una delle due relazioni seguenti:

$$a^x = e^{x\ln(a)} \tag{2.4}$$
$$e^x = a^{x\log_a(e)} \tag{2.5}$$

2.3 Derivate di funzioni elementari e regole di derivazione.

Esercizio 2.6 (*)**.** *Si determini la derivata della seguenti funzioni*[3]

[3] Per gli esercizi potrebbe servire ricordare le seguenti formule trigonometriche

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

(a) $f(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_{200}}{200}x^{200}$ *con* $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{200}$ *parametri costanti.*

(b) $f(x) = 1 + 3xe^x$

(c) $f(x) = \sin x \cos(3x) + \sin(3x)\cos(x)$

(d) $f(x) = \sin(4x)$

(e) $f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

(f) $f(x) = \cos(2x)$

(g) $f(x) = a^x$

(h) $f(x) = \dfrac{a^x}{e^x \log_{10}\left(\dfrac{x^{\sqrt[8]{8}}}{\sqrt[8]{8}}\right)}$

(i) $f(x) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \delta\right)$ *(A, λ e δ parametri* costanti *che si considerano assegnati!).*

(l) $f(x) = \log_a(\gamma^2 + x^2 + 2\gamma x)$ *($a > 1$ parametro assegnato).*

(m) $f(x) = a^{\gamma^2 + x^2 - 2\gamma x}$ *($a > 1$ parametro assegnato).*

(n) $f(x) = \ln(\cos^2 x)$ *(Si stabilisca il campo di esistenza di questa funzione).*

(o) $f(x) = \cos(\ln x)$

(p) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(q) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(r) $f(x) = (7\pi)^{-1/3}\cos(x\sqrt[3]{7\pi} - e^2) + \frac{2}{7}x^7 - \log_\pi\left(\sqrt[316]{4}\right)$

Ricorda, assegnati $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ed $m \in \mathbb{Z}$ allora $\sqrt[n]{a^m} = a^{(m/n)} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n/m}$.

(s) $f(x) = \dfrac{3x + \log_a(3x)}{\cos x}$

Soluzione

(a) Utilizziamo la proprietà (v. Tab. 1)

$$\frac{d[f_1(x)+f_2(x)]}{dx} = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx}$$

possiamo scrivere che, assegnata la funzione $f(x)$, la sua derivata nel generico punto x assume la forma

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[a_0]}{dx} + \frac{d[a_1 x]}{dx} + \frac{d\left[\frac{a_2}{2}x^2\right]}{dx} + \frac{d\left[\frac{a_3}{3}x^3\right]}{dx} + \cdots + \frac{d\left[\frac{a_{200}}{200}x^{200}\right]}{dx}$$

essendo i coefficienti $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{200}$ *costanti assegnate*. Ricorrendo alla Tab. 1 vediamo subito che la derivata di una qualunque costante reale è zero. Inoltre, assegnate una costante a qualunque ed una funzione $f_1(x)$, sfruttando la proprietà

$$\frac{d[af_1(x)]}{dx} = a\frac{df_1(x)}{dx}$$

possiamo scrivere che

$$\frac{d\left[\frac{a_n}{n}x^n\right]}{dx} = \frac{a_n}{n}\frac{d[x^n]}{dx}$$

Per finire, dalla Tab. 1 ricaviamo la derivata della funzione x^n. Mettendo tutto insieme risulta:

$$\begin{aligned}
\frac{d[a_0]}{dx} &= 0 \\
\frac{d[a_1 x]}{dx} &= a_1 \\
\frac{d\left[\frac{a_2}{2}x^2\right]}{dx} &= a_2 x \\
\frac{d\left[\frac{a_3}{3}x^3\right]}{dx} &= a_3 x^2 \\
&\vdots \\
\frac{d\left[\frac{a_{200}}{200}x^{200}\right]}{dx} &= a_{200}x^{199}
\end{aligned}$$

ovvero, mettendo tutto insieme

$$\frac{df(x)}{dx} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_{200}x^{199}$$

e quindi la derivata di un polinomio di grado n (in questo caso $n = 200$) fornisce un polinomio di grado $n-1$ (i questo caso $n-1 = 199$).

(b) Utilizzando le regole di derivazione in Tab. 1 possiamo scrivere

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[1+3xe^x]}{dx} = \frac{d[1]}{dx} + \frac{d[3xe^x]}{dx} = 3\frac{d[xe^x]}{dx}$$

In particolare, ricordiamo qui la regola della derivata di un prodotto, ovvero, assegnate due funzioni $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ risulta

$$\frac{d[f_1(x)f_2(x)]}{dx} = f_2(x)\frac{df_1(x)}{dx} + f_1(x)\frac{df_2(x)}{dx}$$

Utilizzando la regola qui sopra adattata al nostro caso otteniamo

$$\frac{d[xe^x]}{dx} = e^x\frac{dx}{dx} + x\frac{d[e^x]}{dx} = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

e quindi, in definitiva,

$$\frac{df(x)}{dx} = 3(1+x)e^x$$

(c) Si osserva che $\sin(4x) = \sin(x+3x)$, ovvero, utilizzando la regola $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ si trova $\cdots$ (*vedi esercizio successivo e dopo continua questo!!!!!*)

(d) La funzione assegnata è $f(x) = \sin(4x)$. In Tab. 1 è riportato il risultato relativo alla derivata della funzione $\sin x$ e non della funzione $\sin(4x)$. Possiamo tuttavia effettuare una *sostituzione di variabile*. Chiamiamo $z = 4x$. In effetti z è una funzione di x, ovvero, al variare di x, varia anche z. Ad esempio, per $x = 0$, $z = 0$; per $x = 1/4$, $z = 1$; per $x = 1/2$, $z = 2$ e così via. Dobbiamo allora, in maniera più corretta scrivere $z(x) = 4x$ (che sottolinea il fatto che z è una funzione di x). Come al solito sfruttiamo allora le regole di derivazione di Tab. 1 . In particolare, una volta che cambiamo variabile, la funzione $f(x)$ si può scrivere come una funzione di z (che a sua volta è una funzione di x), ovvero f diventa una funzione di funzione. In particolare possiamo scrivere

$$f(z(x)) = \sin(z(x))$$

A questo punto la derivata rispetto ad x (ovvero rispetto alla variabile della funzione $z(x)$) si esegue come

$$\frac{df(z(x))}{dx} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Nel nostro caso

$$\frac{d\sin(z(x))}{dx} = \frac{d[\sin z]}{dz}\frac{dz}{dx}$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned}\frac{d[\sin z]}{dz} &= \cos z\\ \frac{dz}{dx} &= \frac{d[4x]}{dx} = 4\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{d[\sin(z(x))]}{dx} = \frac{d[\sin z]}{dz}\frac{dz}{dx} = 4\cos z$$

Esprimendo tutto nella vecchia variabile x, otteniamo

$$\frac{d[\sin(4x)]}{dx} = 4\cos(4x)$$

(e) Cominciamo ad utilizzare la regola della derivata di una somma, ovvero

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[\cos^2(x) - \sin^2(x)]}{dx} = \frac{d[\cos^2(x)]}{dx} - \frac{d[\sin^2(x)]}{dx}$$

e calcoliamo separatamente le due derivate. Cominciamo dal primo termine, ovvero $f_1(x) = \cos^2(x) = (\cos x)^2$ (il nome $f_1(x)$ è stato scelto in maniera del tutto arbitraria). Effettuiamo il cambiamento di variabile $z(x) = \cos x$. Allora otteniamo $f_1(z(x)) = z^2$. A questo punto calcoliamo

$$\frac{df_1(z(x))}{dx} = \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{d[z^2]}{dz}\frac{d[\cos x]}{dx} = 2z \cdot (-\sin x)$$

Ricordando poi che $z = \cos x$ ed esprimendo tutto nella vecchia variabile x otteniamo il risultato finale

$$\frac{df_1(x)}{dx} = -2\sin x \cos x$$

Analogamente si trova che

$$\frac{d[\sin^2 x]}{dx} = 2\sin x \cos x$$

Dunque, mettendo insieme le cose otteniamo:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[\cos^2(x)]}{dx} - \frac{d[\sin^2(x)]}{dx} = -2\sin x\cos x - 2\sin x \cos x = -4\sin x\cos x = -2\sin(2x)$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ con $\alpha = \beta = x$. Infatti:

$$-2\sin(2x) = -2\sin(x+x) = -2\big[\sin x\cos x + \cos x \sin x\big] = -2\big[2\sin x\cos x\big] = -4\sin x\cos x$$

(f) V. Esercizio (d)

(g) Per calcolare la derivata della funzione esponenziale $f(x) = a^x$ possiamo usare la Tab. 1) e quindi trovare che

$$\frac{d[a^x]}{dx} = \ln(a)\, a^x$$

Come aggiunta all'esercizio: dimostriamo il risultato qui sopra assumendo di conoscere la derivata della funzione e^x, ovvero:

$$\frac{d[e^x]}{dx} = e^x$$

Uno dei modi di dimostrare il risultato richiesto è attraverso un cambiamento di base (v. Sec. 2.2). Ovvero dobbiamo passare dalla funzione esponenziale scritta in base a, alla funzione esponenziale scritta in base e. Dobbiamo dunque *ricordare* le proprietà delle funzioni esponenziale e logaritmo. Per definizione, quando si scrive *logaritmo in base a di y*, ovvero

$$x = \log_a y, \qquad (y > 0)$$

questo vuol dire che $y = a^x$. Ricordiamo anche che il logaritmo in base e di y, ovvero $\log_e y$ (spesso denominato *logaritmo naturale*), si indica con $\ln y$ (ovvero $\ln y = \log_e y$). Proviamo che $e^{\ln(a^x)} = a^x$. Infatti $\ln(a^x) =$ *quel numero β che, messo ad esponente della base (e), restituisce l'argomento (ovvero a^x)*. Dunque, se prendiamo β e lo mettiamo ad esponente di e, otteniamo a^x, ovvero $e^\beta = a^x$. Tuttavia, $\beta = \ln(a^x)$

e quindi $f(x) = e^{\ln(a^x)} = a^x$. Abbiamo semplicemente ritrovato l'espressione in Eq. (2.4) richiamata a Pag. 17.

Possiamo adesso considerare la funzione $f(x) = e^{\ln(a^x)}$ e calcolarne la derivata nel generico punto x utilizzando le regole di derivazione in Tab. 1. Facciamo la sostituzione $z(x) = \ln(a^x) = x \ln a$, allora $f(x)$ diventa $f(z(x)) = e^z$ e quindi

$$\frac{df(z(x))}{dx} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\frac{df}{dz} = \frac{d[e^z]}{dz} \quad = \quad e^z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d[x \ln a]}{dx} = \ln(a)\frac{dx}{dx} \quad = \quad \ln a$$

e quindi abbiamo

$$\frac{df(z(x))}{dx} = \ln(a)e^z$$

ovvero, ricordando la sostituzione $z = \ln(a^x)$ e che $e^{\ln(a^x)} = a^x$ abbiamo, esprimendo tutto nella vecchia variabile x

$$\frac{df(x)}{dx} = \ln(a)\, e^{\ln(a^x)} = \ln(a)\, a^x$$

Si osservi che, quando $a = e$, sfruttando il risultato appena trovato, abbiamo

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d[e^x]}{dx} = \ln(e)\, e^x = e^x$$

essendo $\ln(e) = 1$ e quindi ritroviamo, ovviamente, il risultato di partenza relativo alla derivata della funzione esponenziale di base e.

(h) Riscriviamo la funzione assegnata nella maniera

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

con:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= a^x \\ f_2(x) &= e^x \log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right), \qquad (\beta = \sqrt[8]{8}) \end{aligned}$$

Dalla Tab. 1 vediamo che

$$\frac{d\left[\dfrac{f_1}{f_2}\right]}{dx} = \frac{f_2\dfrac{df_1}{dx} - f_1\dfrac{df_2}{dx}}{[f_2(x)]^2} \tag{2.6}$$

Per risolvere l'esercizio dobbiamo elevare f_2 al quadrato, svolgere separatamente le derivate di f_1 ed f_2 e per finire mettere insieme i pezzi usando la formula (2.6).

Possiamo svolgere senza difficoltà le seguenti operazioni (v. anche esercizio (g)):

$$
\begin{aligned}
[f_2(x)]^2 = \left[e^x \log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right)\right]^2 &= e^{(2x)} \log_{10}^2\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right) \\
\frac{df_1(x)}{dx} &= \ln(a)\, a^x
\end{aligned}
$$

La derivata di f_2 è un pochino più complicata. Infatti abbiamo

$$
\frac{df_2}{dx} = \frac{d[e^x]}{dx}\ \log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right) + e^x\ \frac{d\left[\log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right)\right]}{dx} = e^x\ \log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right) + e^x\ \frac{d\left[\log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right)\right]}{dx} \tag{2.7}
$$

Dobbiamo fare la derivata di $\log_{10}(x^\beta/\beta)$. Utilizzando la sostituzione $z(x) = x^\beta/\beta$ e facendo riferimento alla Tab. 1 troviamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d[\log_{10}(z(x))]}{dx} &= \frac{d[\log_{10}(z)]}{dz}\frac{dz}{dx} \\
\frac{d[\log_{10}(z)]}{dz} &= \frac{\log_{10}(e)}{z} = \frac{\beta \log_{10}(e)}{x^\beta} \\
\frac{dz}{dx} &= x^{\beta-1}
\end{aligned}
$$

Ricaviamo dunque il risultato

$$
\frac{d\left[\log_{10}(z(x))\right]}{dx} = \log_{10}(e)\ \frac{\beta}{x}
$$

Dunque Eq. (2.7) diventa

$$
\frac{df_2(x)}{dx} = e^x\ \log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right) + e^x\ \frac{\beta \log_{10}(e)}{x} = e^x\left[\log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right) + \frac{\log_{10}(e^\beta)}{x}\right]
$$

Per finire Eq. (2.6) diventa

$$
\frac{d\left[\frac{f_1}{f_2}\right]}{dx} = \frac{\left\{\ln(a)\ a^x f_2(x)\right\} - \left\{f_1(x) e^x \left[\log_{10}\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right) + \frac{\log_{10}(e^\beta)}{x}\right]\right\}}{e^{(2x)} \log_{10}^2\left(\frac{x^\beta}{\beta}\right)}
$$

ovvero, giocando un pochino con il risultato

$$
\frac{d\left[\frac{f_1}{f_2}\right]}{dx} = \left(\frac{a}{e}\right)^x \frac{\ln(a/e)}{\log_{10}(x^\beta/\beta)} - \frac{(ea)^x}{x[f_2(x)]^2}\log_{10}(e^\beta)
$$

(i) Poniamo $z(x) = \dfrac{2\pi}{\lambda}x - \delta$, allora $f(x)$ diventa

$$
f(z(x)) = A \sin(z)
$$

Essendo

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= A\cos(z) \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

abbiamo, in definitiva

$$\frac{df(z(x))}{dx} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = A\cos(z)\,\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi A}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \delta\right)$$

Colophon

Questo lavoro è stato realizzato con LaTeX, utilizzando la distribuzione MacTeX (http://www.tug.org/mactex/). LaTeX è un software di mark–up *open source*, distribuito con licenza LaTeXproject public license, i cui termini e condizioni d'uso possono essere reperiti dal sito https://www.latex-project.org/lppl/.

Per queste note è stata utilizzata la classe Article standard, rielaborata dall'Autore (G. Forte) sulla base della modifica della stessa ad opera di Igor Shevtsov (IS). Il template TeX originariamente modificato da IS può essere reperito dal sito https://www.overleaf.com/latex/examples/introduction-to-electrical-engineering-example-assignment-template/pqvbrbjtjcqq ed è distribuito con Licenza Creative–Commons Attribuzione 4.0 International (CC–BY–4.0, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.it)

Contatti

Giuseppe Forte, Centro Scolastico Kennedy, Via Circumvallazione 13 (Palazzo Cammino), 83100 AV
email: gforte@outlook.it, Skype: giuseppe.forte22.